ЛЕКЦІЯ 12. КЛАСИФІКАЦІЯ ФУНКЦІЙ. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Короткий зміст

У цій лекції:

— подано класифікацію функцій;

— розглянуто побудову графіків функцій деяких елементарних функцій за допомогою геометричних перетворень: паралельного перенесення, розтягування (стискання), дзеркального відбиття.

12.1. Класифікація функцій

1. Основні елементарні функції. До *основних елементарних функцій* належать: стала, степенева, показникова, логарифмічна, тригонометричні й обернені тригонометричні функції.

2. Елементарна функція. Функцію, одержану скінченною кількістю суперпозицій і арифметичних дій над основними елементарними функціями, називають *елементарною.*

3. Раціональні функції. Многочлен

$P_n(x)$ називають *цілою раціональною* функцією.

Функцію $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називають *дробово-раціональною* функцією.

4. Ірраціональні функції. Функцію, утворену скінченною кількістю суперпозицій і арифметичних дій над раціональними функціями і над степеневими функціями з дробовими показниками і яка не є раціональною, називають *ірраціональною*.

5. Алгебричні функції. Раціональну або ірраціональну функцію називають *алгебричною*.

6. Трансцендентна функція. Елементарну функцію, яка не є алгебричною називають *трансцендентною*.

12.2. Геометричні перетворення графіків функцій

12.2.1. Про побудову графіків

1. Щоб побудувати графік функції, треба визначити положення всіх його точок відносно деякої системи координат Oxy. Проте у загальному випадку це зробити не можна, оскільки переважна більшість графіків функцій має нескінченну множину точок.

Зазвичай, будуючи «вручну» наближено ескіз графіка функції, визначають досить велику кількість «близьких» між собою точок графіка. Далі, на підставі відповідних властивостей заданої функції, ці точки послідовно сполучають однією або кількома «плавними» лініями.

2. В елементарній математиці багато важливих властивостей функцій не вивчають. Засобами елементарної математики вдається здійснювати побудови графіків функцій лише у найпростіших випадках.

12.2.2. Паралельне перенесення графіка вздовж осі абсцис

1. Знаючи графік функції $y = f(x)$, з'ясуймо, як виглядає графік функції

$$y = f(x - a),$$

де $a = \text{const}$.

2. Якщо $a > 0$, то функція $f(x - a)$ набуває тих самих значень, що й функція $f(x)$, але для значень x, більших на a. Тому графік $y = f(x - a)$ має ту саму форму, що й графік $y = f(x)$, проте він зсунутий відносно графіка $y = f(x)$ у додатному напрямі осі Ox на a одиниць.

3. Якщо $a < 0$, то графік функції $y = f(x - a)$ зсунуто відносно графіка $y = f(x)$ у від'ємному напрямі осі Ox на $(-a)$ одиниць.

4. Отже, щоб побудувати графік $y = f(x - a)$, графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Ox на a (ліворуч для $a < 0$, праворуч для $a > 0$).

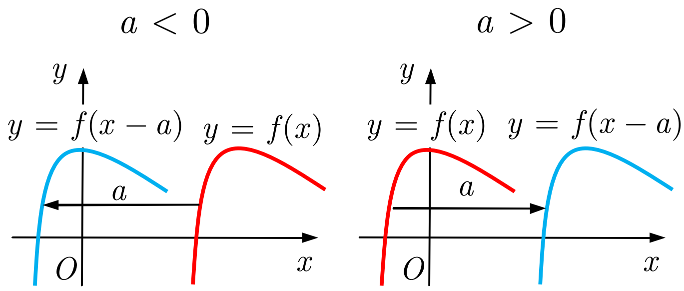

Рис. 12.1. Паралельне перенесення графіка вздовж осі Ox

12.2.3. Паралельне перенесення графіка вздовж осі ординат

1. При тих самих значеннях x значення функції $f(x) + b$ відрізняються від значень функції $f(x)$ на число b.

2. Якщо $b > 0$, то значення $f(x) + b$ більші від значень $f(x)$ на b, а, якщо $b < 0$, то — менші від значень $f(x)$ на $(-b)$.

3. Отже, щоб побудувати графік $y = f(x) + b$, графік $y = f(x)$ паралельно переносять уздовж осі Oy на b (вниз для $b < 0$, вгору для $b > 0$).

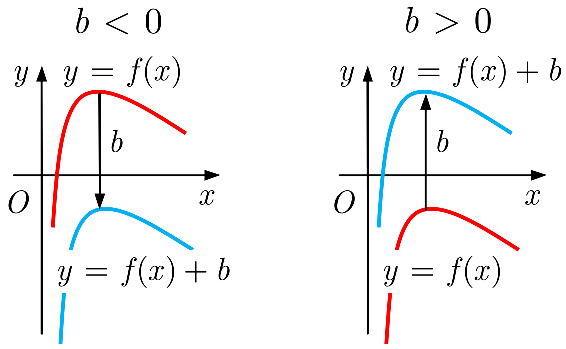

Рис. 12.2. Паралельне перенесення графіка вздовж осі Oy

12.2.4. Стискання (розтягування) вздовж осі абсцис

1. Уважаючи, що графік функції $y = f(x)$ відомий, з'ясуємо, який вигляд має графік функції $y = f(kx)$, де $k = \text{const} > 0$.

2. Функція $f(kx)$ набуває тих самих значень, що й функція $f(x)$, але для значень x, поділених на k. Приміром, для $x = x_0$ значення функції $f(x)$ дорівнює $f(x_0)$; функція $f(kx)$ також набуває значення $f(x_0)$, але для $x = \dfrac{x_0}{k}$.

Тому, щоб із графіка функції $y = f(x)$ дістати графік функції $y = f(kx)$, досить абсциси всіх точок цього графіка поділити на k (залишивши незмінними ординати).

3. Отже, щоб побудувати графік $y = f(kx)$, графік $y = f(x)$ розтягують у $\dfrac{1}{k}$ разів $(0 < k < 1)$ уздовж осі Ox чи стискають у k разів $(k > 1)$ вздовж осі Ox.

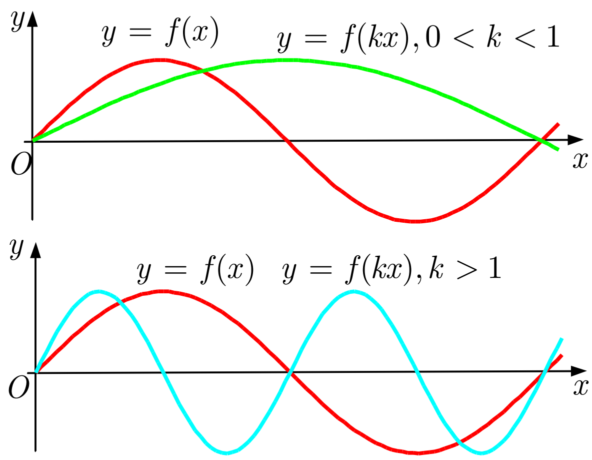

Рис. 12.3. Стискання (розтягування) графіка функції вздовж осі Ox

12.2.5. Стискання (розтягування) вздовж осі ординат

1. Нехай задано графік функції $f(x)$. З'ясуємо, який вигляд має графік функції $cf(x)$, де $c = \text{const} > 0$.

2. Для кожного допустимого значення аргументу $x = x_0$ значення функції $cf(x)$ дорівнює значенню функції $f(x)$, помноженому на c.

Тому, щоб із графіка $y = f(x)$ дістати графік $y = cf(x)$, досить ординати всіх точок цього графіка помножити на c (залишивши незмінними абсциси).

3. Отже, щоб побудувати графік $y = cf(x)$, графік $y = f(x)$ стискають в $\dfrac{1}{c}$ разів $(0 < c < 1)$ вздовж осі Oy чи розтягують у c разів $(c > 1)$ вздовж осі Oy.

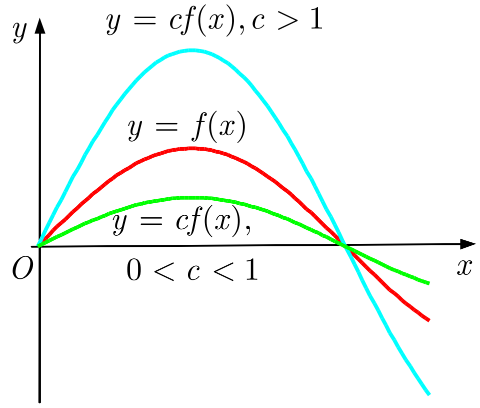

Рис. 12.4. Стискання (розтягування) графіка функції вздовж осі Oy

12.2.6. Дзеркальне відбиття відносно осі абсцис

1. Для тих самих значень x функції $f(x)$ та $-f(x)$ набувають протилежних значень.

Тому для кожного допустимого значення $x = x_0$ точка $A_1(x_0; f(x_0))$, що належить графіку $y = f(x)$, симетрична відносно осі Ox точці $A_2(x_0; -f(x_0))$, що належить графіку $y = -f(x)$.

2. Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі Ox.

3. Отже, щоб побудувати графік $y = -f(x)$, графік $y = f(x)$ симетрично відображують щодо осі Ox.

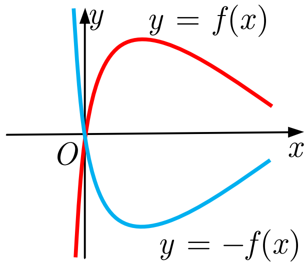

Рис. 12.5. Дзеркальне відбиття графіка функції відносно осі абсцис

12.2.7. Дзеркальне відбиття відносно осі ординат

1. Функція $f(-x)$ набуває тих самих значень, що й функція $f(x)$, але для протилежних значень x. Приміром, для $x = x_0$ значення функції $f(x)$ дорівнює $f(x_0)$; функція $f(-x)$ також набуває значення $f(x_0)$, але для $x = x_0$.

Тому для кожного допустимого значення аргументу $x = x_0$ точка $A_1(x_0; f(x_0))$, що належить графіку функції $y = f(x)$, симетрична відносно осі Oy точці $A_2(-x_0; f(x_0))$, що належить графіку функції $y = f(-x)$.

2. Графіки функцій $y = f(x)$ і $y = f(-x)$ симетричні відносно осі Oy.

3. Щоб побудувати графік $y = f(-x)$, графік $y = f(x)$ симетрично відображують щодо осі Oy.

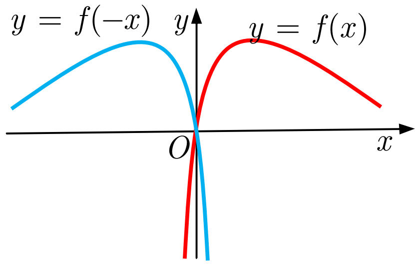

Рис. 12.6. Дзеркальне відбиття графіка функції відносно осі ординат

12.2.8. Графік функції $\boldsymbol{y = f\left(\left|x\right|\right)}$

1. З'ясуймо, як виглядає графік функції $y = f(\left|x\right|)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

2. Якщо $x \geq 0$, то $\left|x\right| = x$ і $f(\left|x\right|) = f(x)$, а якщо $x < 0$, то $\left|x\right| = -x$ і $f(\left|x\right|) = f(-x)$.

Тому, графік функції $y = f(\left|x\right|)$ для $x \geq 0$ збігається із графіком функції $y = f(x)$, а для $x < 0$ — з графіком функції $y = f(-x)$.

3. Отже, щоб побудувати графік $y = f\left(\left|x\right|\right)$, частину графіка $y = f(x), x \geq 0$, доповнюють його відбитком щодо осі Oy.

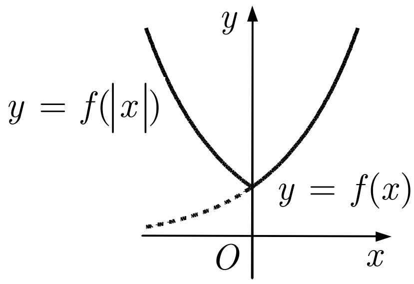

Рис. 12.7. Графік функції $y = f\left(\left|x\right|\right)$

12.2.9. Графік функції $\boldsymbol{y = \left|f(x)\right|}$

1. Розгляньмо побудову графіка функції $y = \left|f(x)\right|$ за відомим графіком функції $y = f(x)$.

Для всіх значень x, для яких $f(x) \geq 0$, $\left|f(x)\right| = f(x)$, а для значень x, для яких $f(x) < 0$, $\left|f(x)\right| = -f(x)$.

Тому графік функції $y = \left|f(x)\right|$ збігається з графіком функції $y = f(x)$ на кожному з її проміжків області означення, на яких $f(x) \geq 0$, а на всіх інших проміжках області означення — з графіком функції $y = -f(x)$.

2. Отже, щоб побудувати графік $y = \left|f(x)\right|$, частину графіка $y = f(x), y \geq 0$, не міняють, а частину графіка $y = f(x), y < 0$, відбивають відносно осі Ox.

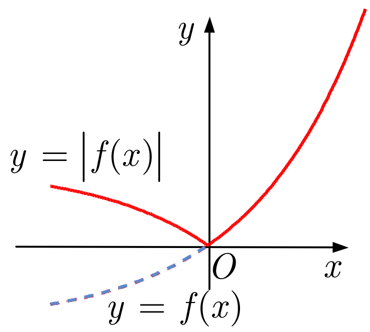

Рис. 12.8. Графік функції $y = \left|f(x)\right|$

12.2.10. Графік рівняння $\left|y\right| = f(x)$

1. Графік рівняння $\left|y\right| = f(x)$ збігається з частиною графіка функції $y = f(x)$ на кожному з її проміжків області означення, на яких $f(x) \geq 0$, і містить також відбиток цієї частини відносно осі Ox.

2. Отже, щоб побудувати графік $\left|y\right| = f(x)$, беруть частину графіка $y = f(x), y \geq 0$, і доповнюють її відбитком відносно осі Ox.

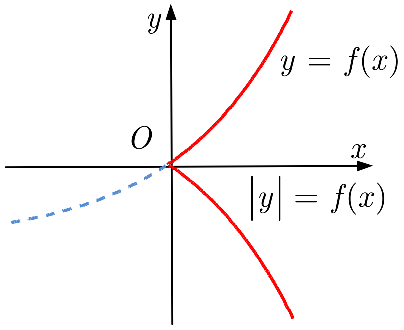

Рис. 12.9. Графік функції $y = \left|f(x)\right|$